

Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas (TEPs)

470. D'Amore B., Maier H. (2003). Producciones escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas. *Epsilon*. (Cádiz, Spagna). 18(2), 53, 243-262.

Bruno D'Amore¹

Departamento de Matemática
Universidad de Bologna
Italia

Hermann Maier

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Regensburg
Alemania

Summary. In a research, carried out in German and Italian classes of secondary level, textual eigenproduction (TEP) – a term which we have derived from Selter (1994) – as a pupils' activity in mathematics classroom and teachers interpretation of their pupils' texts have been investigated. The investigation is methodologically designed according to the rules of an interpretative research paradigm and qualitative research methods (Beck, Maier, 1993, 1994, 1996; Glaser, Strauss, 1967), and we report about it elsewhere (D'Amore, Maier, 1999, 2002). But, subsequently we can give more detailed information about our own and the teachers' interpretation of a lot of pupils' TEPs on the topic of heights in a triangle, resulting in a classification of pupils' concepts about triangle and heights.

Resumen. En una investigación realizada en clases alemanas e italianas de escuela secundaria, se analizaron los TEPs [término que tomamos de Selter (1994) y que explicaremos en detalle sucesivamente; por ahora nos limitamos a definirlo como: actividad escrita de los estudiantes durante la clase de matemáticas] y las interpretaciones dadas por los profesores de los trabajos hechos por sus propios alumnos. La investigación se proyectó metodológicamente siguiendo los principios de un paradigma de investigación interpretativa y los métodos de una investigación cualitativa (Beck, Maier, 1993, 1994, 1996, Glaser, Strauss, 1967) y ya fue objeto de dos publicaciones resumidas (D'Amore, Maier, 1999, 2002). En este artículo retomamos las dos precedentes y las ampliamos, dando información mucho mas detallada ya sea sobre nuestras interpretaciones como sobre aquellas de los profesores respecto a los muchos TEPs de los estudiantes sobre el argumento “alturas de un triángulo”, dando como resultado una clasificación de los conceptos que los estudiantes tienen a propósito del propio triángulo y de sus alturas

1. Los TEPs y su función didáctica

Entendemos con TEPs [literalmente: producciones textuales autónomas de los alumnos] (Selter, 1994) los textos elaborados en modo autónomo por los estudiantes y teniendo como argumento cuestiones matemáticas. Estos no

¹ Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación de la Unidad de Bologna: *Ricerche sul funzionamento del sistema allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione*, dentro en el Programa de Investigación Nacional: *Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*, financiado con fondos del MIUR (Ministerio de la Instrucción, de la Universidad y de la Investigación).

deben coincidir con otras producciones escritas en modo no autónomo (tareas en clase, apuntes, descripciones de procedimientos etc.). Las producciones de estos últimos textos, de hecho, no son autónomas, sino que están sujetas a vínculos más o menos explícitamente establecidos y en general son objeto de evaluación (directa o indirecta).

Digamos que se consideran TEPs aquellas producciones en las cuales el estudiante, puesto en la condición de *desear* expresarse en forma comprensible y usando un lenguaje personal, acepta de liberarse de condicionamientos lingüísticos y hace uso de expresiones espontáneas.

Ejemplos de TEPs son por tanto: protocolos comentados de solución de problemas [es más, el origen de los estudios sobre los TEPs se remonta a “protocolos comentados de solución de problemas” (Powell, Ramnauth, 1992)]; resúmenes lo más posible espontáneos de investigaciones de tipo matemático (tentativos, pasajes, medidas, resultados,...); descripciones detalladas y explicaciones de conceptos o de algoritmos matemáticos; textos introducidos para una situación específica que exige comunicar hechos y relaciones matemáticas en forma escrita, mejor si se enriquece con comentarios personales; textos que definen conceptos matemáticos, que formulan hipótesis, argumentaciones o pruebas en relación a un teorema matemático o a cualquier otra situación matemática;...

Escribir TEPs puede llegar a ser una actividad regular de los estudiantes. Waywood (1992), por ejemplo, cuenta la experiencia de la composición de un periódico; Gallin, Ruf (1993) llaman los textos que sus estudiantes producen regularmente “diario de viaje”; Locatello, Meloni (2002) enfrentan el problema desde anchas miradas.

Hemos visto como entender los TEPs y de que tipo pueden ser; ahora nos preguntamos: ¿cuál es su posible función didáctica?

Para nosotros, existen diversas razones por las cuales los TEPs deberían ser considerados entre las actividades a desarrollar durante las clases de matemática.

La producción de TEPs estimula al estudiante a analizar y a reflexionar sobre conceptos matemáticos, relaciones, operaciones y procedimientos, investigaciones y procesos en la solución de problemas con los cuales tiene que ver. De esta forma todo alumno puede alcanzar una mayor conciencia y una mayor profundidad en la comprensión matemática.

Los TEPs pueden mejorar las competencias y el rendimiento del estudiante en el uso del lenguaje específico, dado que le dejan el tiempo para una atenta y reflexiva elección de los significados lingüísticos, no como sucede por el contrario, en ocasiones, durante una discusión o durante una interrogación, cuando a veces hay evolución del diálogo demasiado rápida y caracterizada por relaciones demasiado pre-establecidas o demasiado condicionada por el contrato didáctico; el TEP impulsa a un uso activo de los términos técnicos y de los símbolos (Maier, 1989a, 1989b, 1993; Maier, Schweiger, 1999).

Los TEPs dan al estudiante la oportunidad de tener continuamente bajo control su propia comprensión de cuestiones matemáticas, gracias a una razonada y reflexiva confrontación con el profesor y con los compañeros de clase.

Los TEPs permiten al profesor evaluar en modo efectivo el conocimiento construido personalmente y la comprensión de las ideas matemáticas, de manera más detallada y profunda de cuanto sea posible sobre la base de comunes textos escritos, normalmente exigidos como protocolos de la actividad de solución de problemas no comentados.

Obviamente, el simple uso de los TEPs en aula no asegura, por sí solo, un efecto positivo sobre la evaluación en el proceso de aprendizaje. Existen algunas condiciones para garantizar el suceso; nos limitamos a mencionar, en este caso, dos que nos parecen de gran importancia.

- Si se propone a los estudiantes de producir textos que puedan dar una visión profunda de su forma de hacer, de pensar y de comprender la matemática, se necesita estar seguros que ellos dirigen sus TEPs a alguien que en verdad tiene *necesidad* de toda la información relativa a la cuestión sobre la cual se escribe; este destinatario, por cuanto ficticio, no debe coincidir con el vacío ni con el mismo profesor (Locatello, Meloni, 2002). Con frecuencia los alumnos tienden a imaginar como único destinatario de sus escritos el profesor, el cual, según ellos, conoce todo aquello que deben comunicar y por tanto el único objetivo es simplemente el de examinar su habilidad con un fin evaluativo. De esta forma no reconocen de hecho la necesidad de dar descripciones y explicaciones detalladas y explícitas, y en particular no aceptan expresarse con un propio lenguaje coloquial, sino que por el contrario intentan de todo para “forzar” la lengua natural en una dirección escolástica, aquella que ellos reconocen como la que espera el profesor (y que en D’Amore, 1996, es llamada *matematiquese*). Motivaciones apropiadas para cambiar la actitud de quien escribe desde la posición de alumno, por ejemplo, podría ser aquella usada con invitaciones del tipo: «Imagina que eres una papá/mamá, un profesor, ...» (D’Amore, Sandri, 1996; D’Amore, Giovannoni, 1997), que se han revelado increíblemente coenvolventes, si se usan en modo oportuno. Otra podría ser aquella de escribir (una carta) a un niño más pequeño o a un compañero de clase que ha perdido algunas lecciones a causa de alguna enfermedad y que desea ser informado sobre lo que se ha hecho en su ausencia (Locatello, Meloni, ANNO); escribir un diario; diseñar un póster para una muestra; componer un artículo sobre un cierto tema matemático; etc. O bien, el profesor puede organizar una particular situación comunicativa en la cual, por ejemplo, un estudiante debe describir un diseño geométrico de forma tal que su compañero de clase este en grado de reconstruir la figura solo sobre la base de su descripción. A veces puede ser de ayuda alejarse de las comunes situaciones de solución de problemas proponiendo preguntas abierta o incompletas (D’Amore, Sandri, 1998).

- El profesor debe buscar buenas ideas no solo para dar estímulos significativos a los alumnos, sino también para trabajar, después, de forma adecuada con los textos producidos. Básicamente él debe estar en grado de interpretar y de analizar los TEPs atentamente y en forma exhaustiva. En realidad no es casi nunca una cosa simple el individuar los conceptos, los pensamientos y las ideas matemáticas que están a la base de los textos producidos por los alumnos. Existe la necesidad no solo de mucha atención, sino también de gran experiencia y de un verdadero y propio entrenamiento específico.

El interés principal del proyecto de investigación, del cual proporcionaremos en seguida organización, metodología y resultados, hace referencia a la segunda condición: ¿en qué medida hacen uso de los TEPs los profesores y qué tanta experiencia tienen en su análisis e interpretación?. ¿Están convencidos que los TEPs pueden ser una ayuda en la enseñanza de la matemática, en particular en la evaluación del conocimiento y de las competencias matemáticas de cada uno de sus alumnos?.

En detalle, nuestras preguntas de investigación son las siguientes:

1. ¿Qué instrumentos usan cotidianamente los profesores para evaluar la actividad matemática de los alumnos?. ¿Qué existe al centro de su evaluación (conocimiento o habilidad?) y ¿en qué dirección y en qué modo esta orientada su evaluación (individual o colectiva)?.
2. ¿Están dispuestos a conocer otros instrumentos de evaluación (nunca antes usados)?, y ¿cuál es su actitud en relación con estos?. En particular, ¿reconocen los TEPs como un posible instrumento de evaluación?, y ¿cuál es su actitud en relación con estos?.
3. ¿Cómo interpretan y analizan un TEP?, ¿Cuál es su punto de vista y cuál es su eficacia y competencia en la interpretación de estos?.
4. ¿Es posible orientar la actitud de los profesores hacia los TEPS como instrumentos de evaluación en sentido positivo?.

2. TEPs: su clasificación e interpretación

Estudiantes italianos y alemanes entre 12 y 15 años produjeron TEPs motivados por la siguiente solicitud (dada por escrito en la versión masculina para los hombres y en la versión femenina para las mujeres): *«Imagina que eres un papá [una mamá]... Tu hijo de 7 años ha sentido decir de alguien que todo triángulo tiene tres alturas y te pide: "Papá [mamá]*

*¿qué quiere decir?". No existe nada mas negativo que eludir las preguntas de un niño, por lo tanto, decides responderle».*²

Como se explicó brevemente en D'Amore, Maier (1999), intentamos desarrollar nuestra interpretación de los textos producidos por los estudiantes siguiendo cuatro criterios:

- nuestra interpretación es en todo lo posible *descriptiva*, esto significa volver a entender aquello que realmente piensa quien escribe, que conceptos y que imágenes ha construido, más que evaluar que ha escrito de matemáticamente correcto o adecuado;
- nuestra interpretación intenta ser *completa e detallada*, es decir no desea inducir conclusiones de ejemplos o afirmaciones, pretende considerar importantes todas las partes del texto, en forma completa, global, más que superficial o local;
- nuestra interpretación intenta ser *abierta*; es decir, no obstante busque coherencia y evidencia, no pretende obtener conclusiones inequívocas a cualquier costo, desea por el contrario admitir la posibilidad de diversas interpretaciones coexistentes en un mismo tiempo;
- nuestra interpretación privilegia aspectos por así decir *complementarios* a aquellos que surgen por escrito, lo que significa que, al contrario de lo que sucede en la transcripción de una comunicación oral, tiende a considerar las omisiones en el texto como indicadores de “déficit”, puesto que el estudiante ha sido estimulado de una instrucción considerada (por admisión de los mismos estudiantes) “clara” y “bien formulada” y han tenido suficiente tiempo para alcanzar a dar una explicación completa de todo aquello que el estudiante - autor sabe o que debe/quiere decir a propósito del tema matemático contenido en la solicitud.

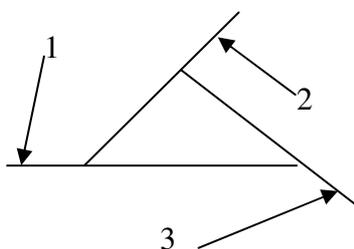
En D'Amore, Maier (2002) presentamos una clasificación de los TEPs de los estudiantes para entender que piensan ellos de los triángulos y de las respectivas alturas. Reenviamos a dicho trabajo para tal clasificación.

En algunos casos, pero, es verdaderamente difícil identificar la idea que el estudiante tiene de altura, incluso cuando parece indicar una.

Por ejemplo un estudiante de 12 años declara lacónicamente que *En un triángulo hay tres alturas* pero agrega a esta frase el diseño reportado en seguida:

² El texto-estímulo ya fue utilizado en (D'Amore, Sandri, 1996) con objetivos de investigación diferentes.

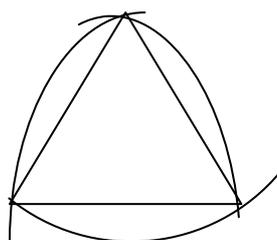
TEP (6):



En un triángulos hay tres alturas.

Otro estudiante escribe: *Un triángulo tiene tres alturas* y agrega el siguiente diseño:

TEP (20):



El texto que servía de estímulo para los TEPs sobre las alturas requería una respuesta a la cuestión de atribuir sentido al hecho que todo triángulo tiene tres alturas. Muchos estudiantes han advertido la necesidad de encontrar argumentos que verificaran la verdad de tal afirmación, otros se limitaron solo a describir tal hecho. En consecuencia, habíamos clasificado los TEPs en las categorías *descriptivas* o *argumentativa*.

De otra parte el texto – estímulo pedía explicar la existencia de las tres alturas de un triángulo a un niño de siete años. De hecho, solo una parte de los estudiantes intentaron hacerlo y han dirigido verdaderamente el propio texto a un niño. La mayor parte de los alumnos por el contrario respondieron como si se tratase de una tarea en clase y dirigieron sus TEPs a un adulto (identificado con el maestro) cuyo objetivo era el de evaluar que saben ellos con respecto a dicho argumento [de otra parte, esta actitud coincide con aquella ya señalada de Schubauer Leoni (1988, 1989) y de Schubauer Leoni, Ntamakiliro (1994)]. Esto nos llevo a clasificar nuevamente los TEPs como *dirigidos a un niño* y *dirigidos al profesor*.

3. Las interpretaciones de los TEPs por parte de los profesores

En este párrafo describiremos el proyecto de nuestra investigación antes de reportar algunos resultados, algunos de los cuales dados ya en precedencia. Este trabajo se proyectó metodológicamente siguiendo los principios de un paradigma de investigación interpretativa y los métodos de investigación cualitativa (Beck, Maier, 1993, 1994, 1996; Glaser, Strauss, 1967). El número de profesores entrevistados fue de 16.

3.1. Estructura del proyecto de investigación

Seguimos una secuencia de 3 entrevistas rigurosamente individuales con cada uno de los 16 profesores de matemáticas, 8 en Alemania y 8 en Italia.

En la *primera entrevista individual* se les pidió a los profesores que evidenciaran los aspectos que están al centro de su atención cuando evalúan en clase las competencias de sus alumnos y de indicar cuáles son los métodos que usan generalmente cuando evalúan. Además se les pidió hablar de sus propios conocimientos con respecto a procedimientos de evaluación que en general no aplican y de evidenciar las eventuales razones por las cuales no hacen uso de estos. En el caso en el cual el método de los TEPs no hubiese sido nombrado espontáneamente a este punto, se pedía a los profesores si los conocían, cuáles eran sus experiencias con estos y si alguna vez habían considerado de introducirlos en sus clases. Los entrevistadores han puesto las preguntas en manera abierta, para dar la posibilidad de que los profesores respondieran en forma coloquial y para poder por tanto proponer ulteriores preguntas más precisas en caso de respuestas no claras o insuficientemente motivadas o circunstanciales.

Sucesivamente, pero siempre en el curso de la primera entrevista, se les presentó a todos los profesores algunos de los TEPs producidos por los estudiantes (en el idioma original o traducido dependiendo del caso), en respuesta a la solicitud recordada en precedencia. Para tener un amplio panorama de los TEPs producidos, véase D'Amore, Maier (2002).

Además de algunos de los TEPs, a los profesores se les propuso textos producidos por estudiantes y publicados en D'Amore, Sandri (1996, 1998), en particular aquel de Simona (2° año de Escuela Media, es decir de 12 a 13 años de edad) que dice: «*Hijo mío, tu aún no conoces la geometría, pero te explicaré que quiere decir la palabra altura. Como tu, yo y papá tenemos una altura que se mide de la cabeza a los pies; así también los triángulos tienen una altura, pero su altura se mide del vértice, que es un pequeño*

punto, hasta la base, que son como nuestros pies, Dado que los triángulos tienen tres pequeños puntos (vértices), tienen tres alturas porque tienen tres pares de nuestros pies. Y dado que nosotros tenemos solo una cabeza y un par de pies, tenemos una sola altura».

Después de haber recibido en consignación estos TEPs, se les pidió a los profesores de leerlos y analizarlos atentamente por cuenta propia, para obtener la máxima información posible acerca de los conocimientos y de las competencias matemáticas de los autores en relación con dicho argumento.

En la *segunda entrevista individual*, de 2 a 5 días después, cada uno de los profesores dio la interpretación de los TEPs que le habían sido consignados. Se pedía a cada uno de comentar en que medida los estudiantes habían entendido la solicitud y de dar un juicio sobre dicha respuesta, de describir eventuales estrategias erradas o razonamientos no correctos dados por los estudiantes, y por último de expresar un juicio sobre las habilidades de los alumnos. Seguidamente se pidió a los profesores de consentir el desenvolvimiento de una prueba análoga en sus clases, a la cual fueran sometidos sus propios alumnos, es decir la redacción de TEPs bajo estímulos idénticos a aquellos dados a los estudiantes italianos en precedencia.

Todos los 16 profesores involucrados en el trabajo aceptaron.

Algunos días después, los 16 profesores hicieron las pruebas en aula y consignaban los protocolos obtenidos sin absolutamente mirarlos. Tales protocolos eran examinados por los dos autores de la investigación.

80 TEPs, 5 por cada una de las clases, cuidadosamente seleccionados entre todos aquellos producidos, según criterios de diversidad, fueron transcritos en computador, de forma tal que en la sucesiva entrevista los profesores no pudieran reconocer la grafía.

En la *tercera entrevista individual*, se consignaron a cada uno de los profesores las transcripciones de los 5 TEPs elegidos entre aquellos producidos en su clase; se invitaba al profesor a expresar espontáneamente las propias impresiones generales observando los TEPs de los alumnos, antes de entrar en detalle en la interpretación de estos. Generalmente, al inicio el profesor no lograba estar seguro de los respectivos autores y así ha podido hacer un análisis sin recurrir a prejuicios sobre los conocimientos y las habilidades del respectivo alumno. En seguida, analizaron los TEPs uno por uno y se les invito a adivinar el nombre de cada uno de los autores. Una vez declarado el presunto autor se les reveló el verdadero nombre (casi nunca acertado). Conociendo el nombre, el respectivo profesor ha podido hacer ulteriores comentarios, y fue invitado particularmente a expresar si había descubierto algo nuevo sobre el estado cognitivo del respectivo estudiante y a especificar que aspecto.

Durante la misma tercera entrevista, se tornó a una discusión general sobre los TEPs. Si el proyecto había representado para el profesor la primera ocasión de usarlos, el entrevistador pedía que pensaba de estos como método para obtener información sobre la competencia y la habilidad de cada uno de los estudiantes. En el caso en el cual el profesor conocía ya los TEPs (lo que no sucedió en ningún caso en Italia y solo dos casos en Alemania), las preguntas fueron dirigidas hacia la posibilidad de modificar su actitud con relación a estos. Los entrevistadores pidieron después si los profesores estarían dispuestos a hacer uso de los TEPs en su futura acción didáctica en matemática.

Todas las tres entrevistas con cada uno de los profesores fueron registradas y transcritas para un análisis detallado. Todas juntas formaron la base para un estudio sobre las respuestas a las preguntas de investigación puestas en precedencia. La investigación partió con 2 casos que fueron inmediatamente analizados para formular, con el método de comparación, hipótesis y teorías. En seguida fueron elegidos y analizados otros 2 casos sobre la base de comparación y desarrollo posterior de la teoría (técnica del *campionamento teoretico* en el sentido de Glaser, Strauss, 1967). De esta forma, fueron estudiados 16 casos distribuidos de la siguiente forma:

- 8 profesores de la escuela secundaria alemana, 2 de grado 6 (estudiantes de 12 años), 1 de grado 7 (estudiantes de 13 años), 2 de grado 8 (estudiantes de 14 años) y 3 de grado 9 (estudiantes de 15 años)
- 8 profesores italianos, 1 del bienio superior (estudiantes de 14 a 16 años), 5 de escuela media (estudiantes de 11 a 14 años) y 2 de escuela elemental (estudiantes de 6 a 11 años) (ninguno de los protocolos relativos a estos 2 últimos aparece en este artículo).

El estudio analítico comparativo de tales documentos se realizó en unas ocasiones en Bologna y en otras en Regensburg.

3.2. Algunos resultados

En primer lugar presentamos las descripciones que los profesores dieron de los criterios y de los instrumentos que usaban en el proceso de evaluación obtenidos en la primera entrevista y las interpretaciones dadas acerca del TEP de Simona en la segunda entrevista. En segundo lugar damos a conocer las interpretaciones que los profesores dieron sobre los TEPs de sus propios estudiantes obtenidos en la tercera entrevista y sus comentarios conclusivos sobre los TEPs como instrumento de evaluación en sus clases. Naturalmente nos limitamos a algunos ejemplos, reenviando a D'Amore, Maier (2002) para un panorama más amplio.

3.2.1. Criterios y métodos de evaluación

Un vez que se les pidió a los profesores de indicar los métodos y criterios que utilizan en el momento en el cual evalúan las competencias matemáticas individuales de sus estudiantes, muchos profesores evidenciaron genéricamente la existencia de diversos métodos, pero la mayor parte de ellos, tanto italianos como alemanes, se refirieron a las mismas modalidades:

- preguntas directas o interrogaciones orales en clase;
- breves textos escritos (referidos a una pequeña gama de argumentos), en la mayor parte de las veces sin previo aviso;
- largos textos escritos (referidos a una amplia gama de argumentos) para desarrollar al menos en una hora, pero regularmente en dos, avisando a los estudiantes con mucho tiempo de anticipación.

Estos métodos comunes de evaluación, así difundidos universalmente, pueden ser catalogados como “formales”. En muchos casos los estudiantes deben responder preguntas directas o a problemas estándar. Sus respuestas y sus resultados parciales o finales pueden ser valorados como correctos o no tan correctos, sobre la base de reglas establecidas por el profesor. Así el resultado de la evaluación puede ser usado para una supuesta y posible jerarquización de los estudiantes sobre la base del nivel de competencia individual. El orden puede ser dividido en pocas categorías, representadas por evaluaciones numéricas o por adjetivos. Se trata, para decirlo brevemente, de una evaluación normativa de las competencias de los estudiantes, cuyo principal criterio parece ser una correcta y clara reproducción de definiciones y algoritmos memorizados.

Existen algunas excepciones. El profesor alemán K., por ejemplo, hace notar como su principal instrumento de evaluación es la observación de cada uno de sus alumnos, situación que parece le permite ser capaz de “*indicar rápidamente evidentes puntos débiles, y de realizar esto en forma individual*”. Sin embargo sus observaciones están restringidas a contribuciones verbales y a resultados individuales, de trabajos hechos entre compañeros o en grupo en ambiente aula.

La pregunta en la cual se pedía a los profesores si conocían instrumentos de evaluación que, por cualquier razón, no usan, aportó pocas respuestas concretas. Algunos profesores confesaron simplemente de no conocer otras. Otros se limitaron a afirmar que existen muchos, pero que “*no son todos aplicables*”. De hecho ninguno mencionó o describió algún otro instrumento de evaluación. El profesor alemán (S.) mencionó los TEPs espontáneamente. El definía los TEPs como “*una composición matemática*”. Existen algunas razones por las cuales él no aplica tal técnica, “*principalmente a causa de los muchos estudiantes provenientes de países extranjeros que tienen una gran dificultad con el uso del idioma; no puedo esperar de ellos resultados satisfactorios. Además este tipo de evaluación*

requiere de una enorme cantidad de tiempo, no solo en clase, sino también para la revisión". No obstante esto, él considera significativo el uso "en una clase que posea una competencia lingüística suficiente".

Cuando les pedimos directamente si conocían los TEPs, también el profesor alemán We afirmo de haber tenido alguna experiencia con estos y consideraba que se trata de "un adecuado instrumento de evaluación", pero que por lo que a él respecta lo considera válido solo sobre el argumento de las ecuaciones. En este caso el uso de los TEPs le parece "particularmente adecuado, porque para producir un texto el estudiante debe construir la lógica de lo que se le pide y necesita de una profunda comprensión". Sin embargo él desea distinguir entre evaluar en el sentido de dar una nota y evaluar en el sentido de reconocer las competencias de los estudiantes, y no esperaría nunca que los TEPs fueran usado con el primer objetivo.

3.2.2. Interpretaciones de los profesores con respecto al texto de Simona

De dos profesores alemanes recibimos análisis por demás interesantes del TEP de Simona. Presentamos sin ninguna omisión la interpretación de Gr.:

Creo que este punto no esta mal:... porque la altura se mide partiendo de los vértices y porque un triángulo tiene tres vértices, hay una altura posible de cada vértice a la base, hasta la afirmación sobre los tres pares de pies. De este punto en adelante no logro seguirla... Bien, habría podido decir que la altura es perpendicular a la base o cualquier otra cosa por el estilo, pero pienso que esto podía ser clarificado oralmente. No piensan en todo, mientras deben formularlo. Sin embargo creo que se podría afirmar que ha entendido un poco... Incluso he pensado en como yo habría dado respuesta a la pregunta, yo mismo no sabría como explicar a un niño de 7 años en forma tal que él hubiera estado en grado de entender. Ciertamente hubiera podido explicarlo matemáticamente pero de otra forma probablemente con la ayuda de un modelo o algo por el estilo. Se podría explicar mejor en forma manual, de otra forma un niño de 7 años no entiende. Por decir algo podría ser presentado un triángulo real y hacer caer un peso hacia abajo, girar el triángulo y hacer caer de nuevo el peso y continuar así ... De este modo se puede ver que cae siempre verticalmente. Pero ciertamente no puede ser entendido con la palabra "perpendicular". Te puedo decir seriamente que yo mismo he tenido alguna dificultad con esta tarea. De todas formas pienso que muchos estudiantes deberían replantear lo que han aprendido en clase más que pedirse como podrían explicarlo a un niño.

Este tipo de análisis es interesante al menos por las dos razones siguientes:

□ entrando en detalle en el texto de Simona, el análisis intenta dar una descripción completa del concepto y de las ideas con respecto a la altura contenidas en el texto, y lo comparan con sus mismos conocimientos matemáticos sobre el argumento;

□ en el momento en el cual evalúan el texto, lo hacen en forma por demás diferenciado.

Es diverso en el caso del siguiente análisis de la profesora italiana B.:

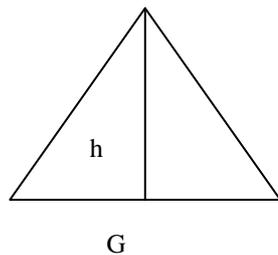
Oh si, estoy asombrada. Esta respuesta centra bien el argumento, una respuesta de alto nivel, desde el momento que está en grado de explicar esto a un niño de siete años, esto significa que en su cabeza ella ha entendido perfectamente que son las alturas de un triángulo... Es necesario ver incluso como intenta de explicarlo lo mejor posible.

3.2.3. Interpretaciones de los profesores de los TEPs de sus alumnos

Las interpretaciones típicamente proporcionada por casi todos los profesores sobre el TEP de Simona y sobre los TEPs de sus propios estudiantes, en el caso de los profesores italianos así como en el caso de los alemanes, son muy diferentes entre ellos.

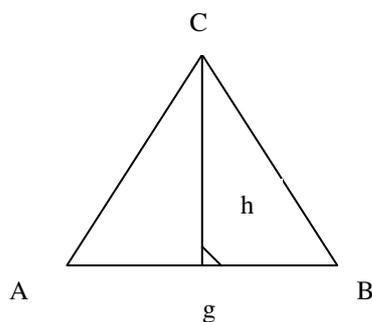
Tales TEPs, son caracterizables gracias a los cinco ejemplos que siguen:

I.



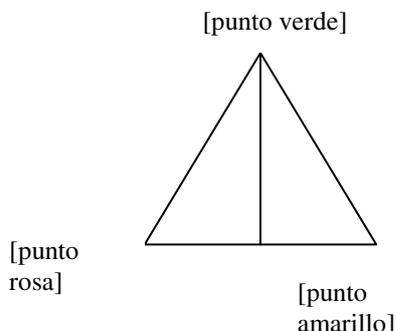
El triángulo tiene una única base y una sola altura con las cuales se puede calcular el área y la circunferencia. No se nada de la tercera altura.

II.



Un triángulo tiene siempre una altura y esta va de la base al punto C. La altura parte siempre perpendicularmente de la base al punto C.

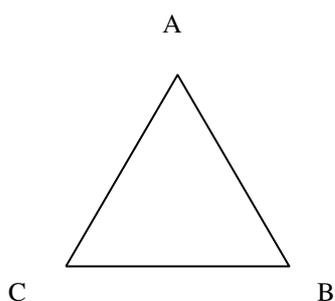
III.



Aquí he diseñado un triángulo y cuando ahora trazo una línea del ángulo verde hasta la línea derecha esta se llama altura. Si dibujo una línea del ángulo amarillo dirigido hacia arriba y del ángulo verde trazo una línea dirigida hacia el lado la línea en alto es también llamada altura. Si hago lo mismo del ángulo rojo y del ángulo verde, la línea en alto se llama aún altura..

IV. *El triángulo es una figura plana; este triángulo tiene una altura, y dado que el triángulo puede ser girado entonces tiene tres alturas.*

V.



La primera altura pasa a través del vértice C. Esa va derecha hasta el segmento opuesto. La segunda altura pasa a través del vértice B. Esa llega derecha al segmento opuesto. La tercera altura pasa a través del vértice A. Esa llega hasta el segmento opuesto.

a. Evaluaciones, interpretaciones no descriptivas. Casi todas las interpretaciones de los profesores están fuertemente caracterizadas de una evaluación más que de expresiones descriptivas. Los profesores no parecen interesados en lo que *realmente* piensa el estudiante a propósito del argumento en cuestión, es decir en los conceptos matemáticos ni en los conocimientos matemáticos alcanzados indicados en el texto. Por lo general formulaban conclusiones sobre el nivel general de competencia de los

estudiantes. Algunos profesores alemanes (y también italianos) se sintieron incluso en grado de determinar tal nivel atribuyendo una puntuación (una calificación) a los autores del texto.

Por ejemplo el TEP (I) fue comentado por el profesor del autor de la siguiente manera: *Diría que tal vez se trata de un estudiante de nivel medio. Aquello sobre la base y la altura para el cálculo del área es correcto, pero no se necesita para la circunferencia. Aquí ha confundido alguna cosa.* Después de conocer el nombre del alumno, cambia posición: *Si, se acerca realmente mucho a los mejores, diría que tiende al siete.*

Lo que el profesor no parece haber comprendido es que el estudiante que ha redactado el TEP (I) no considera las líneas del triángulo como objetos (geométricos) autónomos. Las palabras “base” y “altura” representan en su mente magnitudes (tal vez solo numéricas) de las cuales se sirve si tiene necesidad de calcular alguna cosa relativa al triángulo (área y circunferencia). Esto significa que las interpreta *funcionalmente*. El triángulo posee una base y una altura solo por esta razón, para poder usarlas después con objetivos de cálculo. Así, en la interpretación del autor del TEP (I), se necesita tal vez ver la base y la altura sin hacer diferencia entre estos dos objetos: en el cálculo ambas tienen la misma función, por tanto no existe la necesidad de diferenciarlas. El estudiante usa tal vez los nombres “base” y “altura” casi como sinónimos, considera la base como la “segunda altura” y se refiere a una “tercera altura” en esta misma dirección. Todo esto evidentemente evoca en la mente del estudiante una imaginación algebraica más que geométrica. Aún más, la palabra “triángulo” es usada por él más como estímulo para la elección de un cierto procedimiento algebraico que como objeto geométrico en sí, dejando de lado un “uso” escolástico.

Es un poco diverso expresivamente el caso del texto (IV), en la aproximación conceptual en donde el autor llama triángulo una “figura plana”, es decir lo inserta conceptualmente en la categoría de las figuras planas (polígonos). El estudiante muestra incluso una imagen conceptual de altura bastante clara; según él se trata de una línea que existe solo respecto a un lado del triángulo que es aquel horizontal, entendido como el lado paralelo a las márgenes superior e inferior de la hoja. Esto porque la altura *debe* ser vertical, es decir paralela a las márgenes de la derecha y de la izquierda de la hoja. Contrariamente a lo que se pensaría con este restringido concepto de altura, el autor del texto logra dar una explicación personal de las tres alturas de un triángulo. Imagina de girar el triángulo sobre el plano de forma tal que uno después del otro todos los lados del triángulo queden en posición horizontal. Así obtiene una altura por cada uno de los lados, lo que significa en total tres alturas. (Es interesante como en este caso una línea pueda perder su propiedad de ser altura cuando su posición cambia. De otra parte la misma línea recupera esta propiedad cada

vez que toma una oportuna y particular posición). Pero esto es suficiente, de hecho, para demostrar la existencia de tres alturas.

En todas las circunstancias los profesores siguieron su tendencia a usar los textos escritos de los alumnos para confirmar su competencia matemática en coherencia con las reglas internas de la clase. En esta dirección buscaron de evaluar el texto (en realidad al estudiante) en una forma fuertemente dicotómica. Estos textos, como lo hemos ya afirmado, les pareció o totalmente buenos o absolutamente inadecuados o incorrectos.

Los criterios sobre los cuales los profesores basaron su valoración se refieren principalmente a:

- cuando un estudiante usa reglas del lenguaje matemático formal (en muchos casos, afirmaciones matemáticas correctas dadas por los alumnos en un lenguaje informal no fueron aceptadas);
- cuando las argumentaciones de los estudiantes se acercan a aquellas de los profesores y por tanto a la presentación hecha en clase; los TEPs (y de esta forma los estudiantes) fueron considerados más positivamente en el caso en el cual mostraban puntos similares con los contenidos presentados o con el lenguaje usado por los profesores; las ideas originales de parte de los estudiantes fueron consideradas “interesantes”, pero no muy apreciadas.

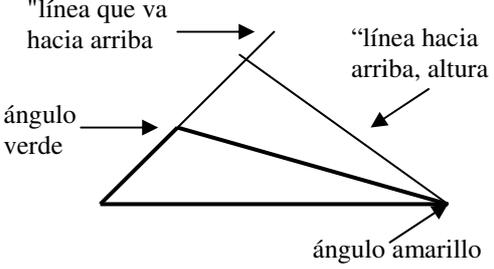
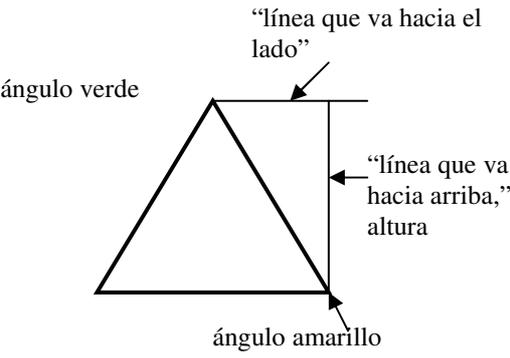
Por lo que respecta al último criterio mencionado, la interpretación del TEP (II) por parte del profesor de la clase del autor proporciona un interesante ejemplo: *Esta respuesta en todo caso tiene algo que ver con el Teorema de Pitágoras. Porque ya hemos empezado a estudiarlo, esto podría jugar un papel en la respuesta. Con la recta perpendicular donde habíamos calculado alguna vez la base. Es posible porque habíamos hecho partir regularmente la altura del punto C. Quisiera evaluarlo como un buen alumno. Y, de forma confidencial, después de conocer el nombre del estudiante: Si, Stefan esta sobre el siete.*

b. Interpretación inequívoca, no abierta. Para nuestra sorpresa, evidentemente los textos aparecen inequívocos a la mayor parte de los profesores. Ellos se sintieron capaces de decir exactamente que pensaban los estudiantes y han mostrado no tener dudas sobre el particular nivel de competencia de cada uno de los autores de los TEPs. Ningún profesor ha dado más de una interpretación posible sobre los conceptos o sobre las ideas matemáticas de los estudiantes.

Ejemplo.

En el TEP (III), la altura que va del punto verde a la “línea derecha” (es decir a la base horizontal) es bastante clara de identificar. Pero ¿cómo se puede interpretar la siguiente afirmación: *Si dibujo una línea del ángulo amarillo dirigido hacia arriba y del ángulo verde trazo una línea dirigida*

hacia el lado la línea de arriba es también llamada altura? Existen al menos dos interpretaciones que tiene la misma probabilidad de ser aquella que alberga la mente del autor, y que pueden ser aclaradas con el análisis de los siguientes diseños.

<p>El estudiante imagina una altura fuera del triángulo, perpendicular a la prolongación del lado opuesto.</p>	
<p>El estudiante tiene en mente la imagen de una altura paralela a lo largo de la hoja y que se dirige hacia una paralela (horizontal) a la base que pasa por el punto verde.</p>	

El profesor sin embargo ha dado un análisis demasiado simplista (parece más una autocomplacencia de su propia elección didáctica) del tipo: *De la formulación podría ser Johann B. Esta entre el siete y el ocho, pero tiende a cometer errores de desatención. Ha formulado el problema de forma completa, estoy muy contenta por esto, porque he trabajado mucho con las tizas de colores en el tablero. [Resulta así explicado el origen de la elección cromática para indicar los vértices hecha por el autor del TEP]. El dibujo lo hace más comprensible, puede ver mejor las relaciones. Verdaderamente, me gusta.*

c. Interpretación global, no detallada. Se podría pensar que los profesores no tienden a analizar el texto palabra por palabra, frase por frase, en forma detallada. Dan la impresión de que no están interesados ni en diferenciar su

evaluación referida a un contenido matemático, ni en describir en detalle y con suficiente exactitud los procesos mentales de los estudiantes evidenciados en sus textos. En la mayor parte de los casos, los análisis de los profesores pueden ser considerados superficiales e incompletos. El TEP (V), por ejemplo, fue interpretado así: *Creo que el estudiante ha entendido el problema de la altura. Ha tomado la altura exactamente del vértice C al lado opuesto; las otras dos del mismo modo. Ciertamente no dijo que deben ser perpendiculares a la base. Pero la respuesta no está mal.*

En el análisis de este TEP, el profesor no señala el hecho que el estudiante no dice “*hasta el lado opuesto*” pero afirma que cada altura “*se alarga derecha hasta el segmento opuesto*”. Esto puede ser considerado equivalente en el lenguaje cotidiano a la expresión matemática “*es perpendicular al lado opuesto*”. Además el autor del texto habla de “*la primera*”, de “*la segunda*” y de “*la tercera altura*”. Esta es su forma particular de demostrar indirectamente la afirmación: *El triángulo tiene tres alturas.*

3.3. Las interpretaciones de los profesores

Los TEPs podrían ser usados como instrumentos para obtener información detallada sobre los conocimientos y sobre la comprensión de los conceptos matemáticos, de los teoremas y de los procedimientos construidos por cada alumno. En nuestro proyecto de investigación hemos buscado de entender en qué medida y/o cómo los profesores de matemáticas que han aceptado de participar pudiesen hacer uso de los TEPs para darse cuenta del nivel de conocimiento y de comprensión de los estudiantes de su propio curso.

Pero: ¿qué tipo de experiencia tiene los profesores en el análisis de textos de este tipo (que no sean banalmente “*tareas en clase*”) y por tanto en su interpretación?. ¿Están convencidos que el análisis de los TEPs puede ser una ayuda en su proceso de enseñanza de la matemática, en particular para evaluar los conocimientos y las competencias matemáticas de cada uno de los estudiantes?.

Nosotros deseábamos ver como los profesores podían realmente trabajar con los TEPs de los estudiantes y de consecuencia nos parecía oportuno y preliminar observar como se hubieran comportado cuando nosotros les hubieramos pedido de interpretarlos.

A continuación presentamos algunos ejemplos de cómo los profesores interpretaron los TEPs de los propios estudiantes *antes* de darles a conocer el nombre de los autores y de cómo comentaron su propia interpretación *después* de ser informados sobre el nombre de los autores (Esta información está aquí indicada con el nombre de los estudiantes entre paréntesis).

Cuando el profesor evalúa el texto sometiendo a juicio y asignando una calificación, eso viene aquí reportado en la categoría numérica ascendente que va 1 a 10. (Obviamente, nosotros no pedíamos de hecho esta valoración

numérica y por tanto, cuando esta aparece es dada espontáneamente del profesor).

Los textos de los TEPs una vez comentados están reportados entre paréntesis cuadrado (pero sin figuras) para comodidad del lector.

Profesor K:

Sobre el TEP (17)[*Un triángulo puede ser girado como se quiera. Una vez ésta es la altura (lado 1) otra vez ésta (lado 2) y otra vez ésta (lado 3). Por eso tiene tres alturas*]: *El estudiante gira el triángulo. Si bien no sepa trazar la altura en las diversas posiciones, por el resto va bastante bien. Se trata probablemente de una explicación demasiado simple, pero, no obstante esto, bastante lógica. Posiblemente debería explicarla en el tablero. Ahora empiezo a estar confundida. Debe tratarse de alguno que ha entendido. "Puede ser girado como se quiera". Podría ser Sabin o Tim (Stephanie). Oh, si, si, esta bien.*

Profesor Ga:

Sobre el TEP (25)[*Si cada triángulo tiene tres alturas, entonces cada una debe partir de un vértice así que resulta un ángulo recto*]. *Yo creo que este estudiante ha pensado en modo correcto, pero se ha expresado en forma inadecuada. Esta girando al rededor de las cosas. Logra poner algo correcto en su respuesta, que la altura parte de un vértice, el ángulo recto... Pero la correcta relación lógica la perdió. Parece ser además un estudiante que no ha comprendido del todo la tarea, que no puede. Pero no se en realidad quien podría ser. (Benjamin P). Esto me sorprende. Porque no es un mal estudiante ni en matemáticas ni en alemán. Bien, esta es la forma en la cual nos podemos equivocar.*

Profesor We:

Sobre el TEP (10)[*Todos los triángulos tienen una estatura del cuerpo [inmediatamente cancelado]. Los triángulos tienen dos piernas y una altura del cuerpo, que es perpendicular a la base. Por consecuencia: $2 \times \text{piernas} + h_k = 3 \text{ alturas}$*]. *El calculo es totalmente sin sentido; mezcló las piernas que serían los lados con la altura. Si bien es cierto que la altura es correcta. Pero parece nunca haber escuchado nada a propósito de las otras dos. Debe ser un estudiante que va mal. Creo sea Tobia G. Esta sobre el cuatro (Nadine D). Realmente, esta fuera de todo en este caso. Verdad?. Es una de las estudiantes buenas. Loca!. "Un triángulo que tiene una estatura y dos piernas". Debo hacer con más frecuencia algo por el estilo para controlar lo que están pensando. Beh! Esta vez estoy verdaderamente desconcertada.*

Profesor Wö:

Sobre el TEP (29) [*El triángulo tiene tres lados. Cada lado puede ser llamado base. Opuesto a cada base esta el punto. Si tu unes el punto a la base. Esta es la altura. Y esto, de hecho puede ser tres veces por cada triángulo*]. El problema [quiere decir: el TEP], para mi, esta expuesto en modo indiscutible. Debe tratarse de uno de los mejores. Si, las dificultades en esto caso existen siempre, además porque entre otras cosas la competencia del lenguaje juega su propio rol. Algunas personas están en grado de expresarse mejor, otras peor. Y es por esto que no se puede siempre decir si depende de la habilidad matemática o lingüística. Se necesita saber separar las dos cosas. Pero la explicación es correcta y relativamente simple e incluso formulada visiblemente. (Gaby L). Es emigrante de Rusia y este pueblo acostumbra a mirar a través de las cosas.

Profesor D:

Sobre el TEP (2) [*Si haces estar a las personas en pie con la cabeza en los vértices y los pies sobre la base, cada una de ellas es una altura. Aquella es su altura (CADA UNO TIENE UNA ALTURA PROPIA). Eso es verdad, existen tres alturas. Si quieres, mi querido niño, puedo dibujar un buen triángulo y tres personas dentro: UNO, DOS y TRES. Tres alturas*]. Oh, este es bonito. Parece exactamente a aquel nos habías dado. [Se refiere al hecho que habíamos discutido en un momento anterior otros TEPs no realizados en su clase; y uno de estos tenía como autora la estudiante con nombre Simona]. Muy parecido. Es una lástima que no haya hecho ninguna figura. [Se le pidió si podía identificar el autor del texto]. No, no lo se, pero tal vez si, tal vez si. Tal vez se trata de... pero no lo se, no, pienso que no estoy en grado. [Se le pide si desea saber el nombre del estudiante; responde que si. Se le dice el nombre del estudiante]. No, ¿realmente?. ¿Pero cómo?. Pero si este estudiante esta siempre mentalmente ausente, siempre fuera, parece siempre fuera. Pero, mira, no me hubiera esperado nunca. Ves?. Es verdaderamente útil. [Hace referimento evidentemente a la función de los TEPs]. Es verdaderamente una cosa muy útil. Todo esto lo podrían traer los libros de texto; ¿si tienes presente?.

Recordamos que habíamos entrevistado a 16 profesores, 8 italianos y 8 alemanes; a cada uno de ellos le fueron propuestos 5 TEPs entre aquellos realizados por los alumnos de su misma clase; disponemos entonces de la interpretación de 80 TEPs.

¿Qué se puede decir a propósito de las interpretaciones de los profesores (de las cuales, las reportadas en precedencia son solo una parte)?. ¿Cómo pueden ser clasificadas?.

Como ya habíamos puesto en evidencia precedentemente, en general, los profesores no parecen muy interesados en lo que realmente piensan los estudiantes a propósito del argumento tratado, ni sobre los conceptos ni sobre los conocimientos matemáticos adquiridos, o por lo menos de como

estos resultan en los TEPs. En ocasiones saltan directamente a conclusiones sobre el nivel general de competencia de los alumnos. Algunos profesores (no pocos) se sienten hasta en grado de determinar este nivel atribuyendo una calificación al autor (desconocido) del texto. Buscan por tanto de evaluar el texto (en realidad al estudiante) en forma fuertemente dicotómica: estos textos, en general, les han parecido o totalmente buenos o totalmente inadecuados o incorrectos

4. Respuestas a las preguntas de investigación y conclusiones

Si la función didáctica de los TEPs, descrita también en nuestros trabajos precedentes (D'Amore, Maier, 1999, 2002) se revelase convincente, parece absolutamente necesario que el profesor haga uso de estos en forma adecuada. Esto significa que él debería propiciar un regular entrenamiento a los estudiantes en el escribir textos que después debe estar preparado y ser capaz de interpretar y de analizar en modo descriptivo más que evaluativo, de manera detallada y completa y no general y selectiva, consciente del hecho que cada texto es abierto a diversas interpretaciones. Evidentemente poseer esta habilidad no es un problema por sí misma; pero debe ser adquirida y objeto de entrenamiento, en los dos sentidos: producción (por parte de los estudiantes) y análisis (por parte del profesor).

Además el profesor debe estar convencido que su acción de enseñanza y de organización del proceso de aprendizaje puede tener y, normalmente tiene, diversos efectos sobre cada uno de los alumnos. Estas diferencias no son solo cuantitativas, es decir relativas al hecho que alumnos diversos obtengan más o menos de la oferta del profesor, sino incluso, en el mismo tiempo, de tipo profundamente cualitativo. Esto significa que los estudiantes construyen cualitativamente conceptos, conocimientos y razonamientos matemáticos *diversos* el uno del otro.

El profesor, una vez conocida la existencia de los TEPs y una vez que aprendió a hacer de estos un uso evaluativo sobre la situación cognitiva real alcanzada por cada estudiante, debería estar impaciente por conocer estas diferencias individuales, para poder proyectar de consecuencia el programa para su clase.

Muchos profesores quedaron sorprendidos en el momento en el cual confrontaron la evaluación de los TEPs con sus precedentes convicciones sobre los autores. Muchos se encontraron sorprendidos por los “buenos estudiantes” que escribieron textos “no buenos” y por los “estudiantes no tan buenos” que escribieron “buenos” textos; pero muchos no se dieron cuenta que el sistema de los TEPs puede ayudarles a aprender mucho sobre

las competencias y los razonamientos de cada uno de sus alumnos. Pocos, de hecho, han concluido con esta convicción, incluso si alguno ha dejado entrever la posibilidad de usar este instrumento regularmente en futuro

Bibliografía

- Beck C., Maier H. (1993). Das interview en der mathematikdidaktischen forschung. *Journal für mathematikdidaktik*. 13, 2, 147–179.
- Beck C., Maier H. (1994). Zu methoden der textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen forschung. En: Maier H., Voigt J. (eds.) (1994). *Verstehen und verständigung im mathematikunterricht – arbeiten zur interpretativen unterrichtsforschung*. Köln: Aulis. 43–76.
- Beck C., Maier H. (1996). Interpretation of text as a methodological paradigm for empirical research in mathematics education. En: Gagatsis A., Rogers L. (eds.) (1996). *Didactics and history of mathematics*. Thessaloniki: Erasmus Project. 3–34.
- D’Amore B. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme, *Journal für Mathematik Didaktik*. 17, 2, 81-97.
- D’Amore B., Giovannoni L. (1997). Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. un’esperienza didattica nella scuola media. *La matematica e la sua didattica*. 4, 360–399.
- D’Amore B., Maier H. (1999). Investigating teachers' work with pupil' textual eingensproductions. Schwank I. (ed) (1999). *European research in mathematics education*. I, II, Osnabrück. 261-278.
- D’Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La Matematica e la sua didattica*. 2, 144-189.
- D’Amore B., Sandri P. (1996). “Fa’ finta di essere...“. Indagine sull’uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19A, 3, 223–246. Version en español: D’Amore B., Sandri P. (1999). Imagina que eres... Indagación sobre el uso de la lengua común en contexto matemático en la escuela media. *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática (Bogotá, Colombia)*. 4, 3, 207-231.
- D’Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4–18.
- Davidson D. M., Pearce D. L. (1983). Using writing activities to reinforce mathematics instruction. *Arithmetic teacher*. 35, 8, 42–45.

- Gallin P., Ruf U. (1993). Sprache und mathematik in der schule. Ein bericht aus der praxis. *Journal für didaktik der mathematik*. 14, 1, 3–33.
- Glaser B.G., Strauss A.L. (1967). *The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research*. New York: Aldine.
- Kasper H., Lipowsky F. (1997). Das lernstagebuch als schülerbezogene evaluationsform in einem aktiv-entdeckenden grundschulunterricht – beispiel aus einem geometrie-projekt. Schönbeck J. (ed.) (1997). *Facetten der mathematikdidaktik*. Weinheim: Dt. Studienverlag. 83–103.
- Locatello S., Meloni G. (2002). . Educazione e Matematica. Cinque anni di esperienze matematiche in collaborazione, corrispondenza, conferenze e continuità. *En prensa*.
- Maier H. (1989a). Problems of language and communication. Pehkonen E. (ed.) (1989). *Geometry – geometrieunterricht*. Helsinki: University. 23–36.
- Maier H. (1989b). Conflit entre langage mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*. 3, 86–118.
- Maier H. (1993). Domande che si evolvono durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 175–191.
- Maier H., Schweiger F. (1999). *Mathematik und sprache. Zum verstehen und verwenden von fachsprache im mathematikunterricht*. Wien: Hölder-Piechler-Tempsky.
- Miller L.D. (1992). Teacher benefits from using impromptu writing prompts in algebra classes. *Journal for research in mathematics education*. 23, 4, 329–340.
- Phillips E., Crespo S. (1996). Developing written communication in mathematics through math penpal letters. *For the learning of mathematics*. 16, 1, 15–22.
- Powell A. B., Ramnauth M. (1992). Beyond questions and answers: prompting reflections and deepening understandings of mathematics using multiple-entry logs. *For the learning of mathematics*. 12, 2, 12–18.
- Schubauer Leoni M. L. (1988). L’interaction expérimentateur-sujet à propos d’un savoir mathématique: la situation de test revisitée. En: Perret-Clermont A. N., Nicolet M. (eds.) (1988). *Interagir et connaître*. Cousset: Delval. 251-264.
- Schubauer Leoni M. L. (1989). Problématisation des notions d’obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. En: Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Ottawa: Agence d’Arc. 350-363.
- Schubauer Leoni M. L., Ntamakiliro L. (1994). La construction de réponses à des problèmes impossibles. *Revue des sciences de l’éducation*. XX, 1, 87-113.

- Selter Ch. (1994). *Eigenproduktionen im arithmetikunterricht der primarstufe*. Wiesbaden: Dt. Universitätsverlag.
- Waywood A. (1992). Journal writing and learning mathematics. *For the learning of mathematics*. 12, 2, 34-43.

Traducción hecha por Martha Isabel Fandiño Pinilla